18 Des histoires de phases

TÉ

1. Expression d'une onde mécanique progressive sinusoïdale

• On se place en un point S, source d'une perturbation mécanique d'un milieu continu non dispersif. L'élongation « y » par rapport à l'équilibre du milieu en ce point, s'exprime en fonction du temps sous la forme : $y(t)=A\times\cos(2\pi\times\frac{t}{T}+\varphi)$.

↳ A : amplitude (« élongation » maximale) de l'onde en mètres (m)
↳ T : période de la perturbation en seconde (s)
↳ φ : phase à l'origine en radians, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. La phase à l'origine se traduit par un décalage temporel du signal.

Non dispersif : l'amplitude A restera la même partout dans le milieu.

À l'origine des temps : t = 0.

2. Pouvoir parler de la phase à l'origine

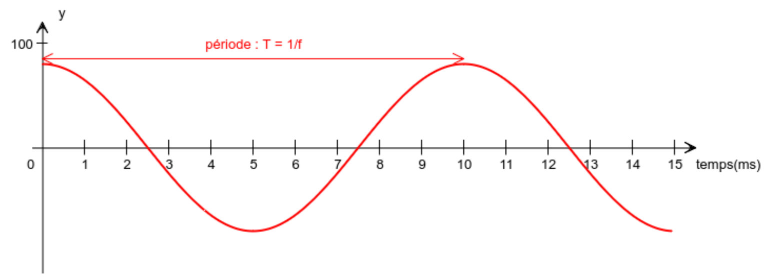
• On se place en un point S, où différentes ondes prennent naissance. On souhaite interpréter la valeur de φ.

2.1. Signal de référence

• Soit $y(t)=A\times\cos(2\pi\times\frac{t}{T})$.

D'ailleurs, l'amplitude vaudra toujours A, pour tous les signaux.

La phase à l'origine est nulle. C'est une sorte de référence.



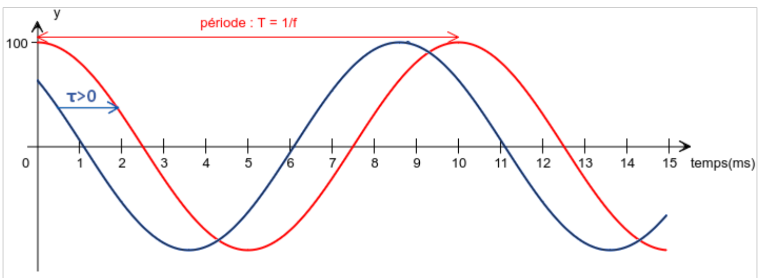
2.2. Signal avec une phase à l'origine positive

• Soit $y_1(t)=A\times\cos(2\pi\times\frac{t}{T}+\varphi)$ avec $\varphi > 0$.

On pose $\varphi=2\pi\times\frac{\tau}{T}$, il vient $y_1(t)=A\times\cos(2\pi\times\frac{t+\tau}{T})$ soit enfin : $\mathbf{y_1(t)=y(t+\tau)}$.

$\tau > 0$ décalage temporel en s

• Que l'on traduit en français par :
↳ y_1 prend à l'instant t la valeur de y à l'instant t + τ.
↳ $y_1(t)$ est en avance sur y(t).
↳ La courbe représentative de $y_1(t)$ est décalée vers la gauche par rapport à celle de y(t).



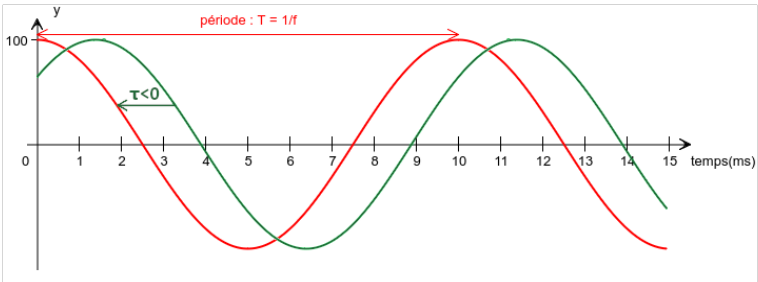
2.3. Signal avec une phase à l'origine négative

• Soit $y_2(t)=A\times\cos(2\pi\times\frac{t}{T}+\varphi)$ avec $\varphi < 0$.

On pose $\varphi=-2\pi\times\frac{\tau}{T}$, il vient $y_2(t)=A\times\cos(2\pi\times\frac{t-\tau}{T})$ soit enfin : $\mathbf{y_2(t)=y(t-\tau)}$.

$\tau > 0$ décalage temporel en s

• Que l'on traduit en français par :
↳ y_2 prend à l'instant t la valeur de y à l'instant $t - \tau$.
↳ $y_2(t)$ est en retard sur $y(t)$.
↳ La courbe représentative de $y_2(t)$ est décalée vers la droite par rapport à celle de $y(t)$.



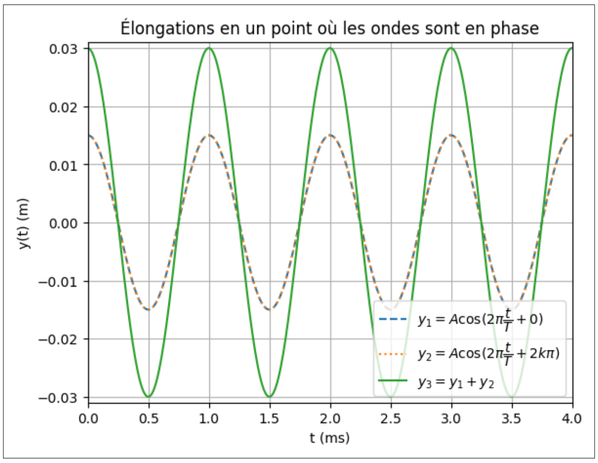
3. Superposition d'ondes sinusoïdales synchrones en un même point

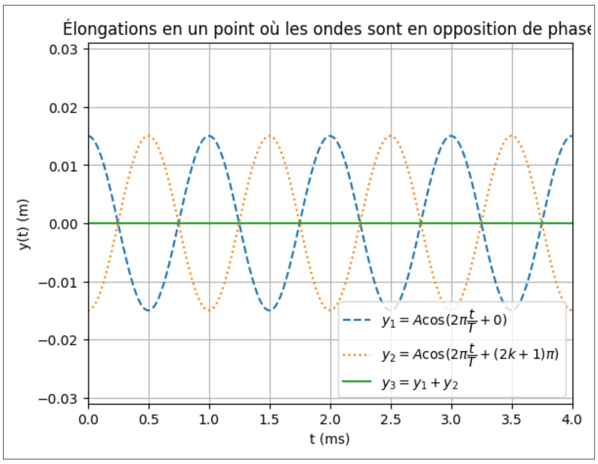
3.1. Ondes mécaniques

• Pour les terminales, c'est l'étude du casque antibruit.
↳ On trace en S, la somme de $y_1(t)=A\times\cos(2\pi\times\frac{t}{T})$ et de $y_2(t)=A\times\cos(2\pi\times\frac{t}{T}+\varphi_2)$ et l'on fait varier φ_2 pour minimiser la somme.
↳ Éduscol prend des phases φ_2 comprises entre 0 et π. Nathan entre 0 et 2π.

Pour la CN, il faut aussi traiter les cas où les amplitudes sont différentes.

La fonction arccos(x) est définie sur [−1, 1] vers [0, π]



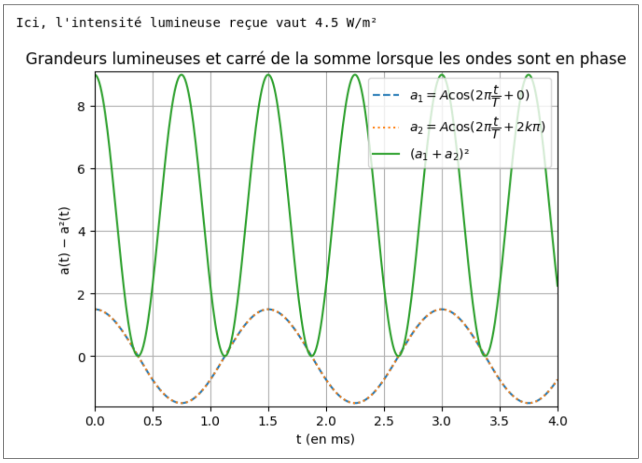


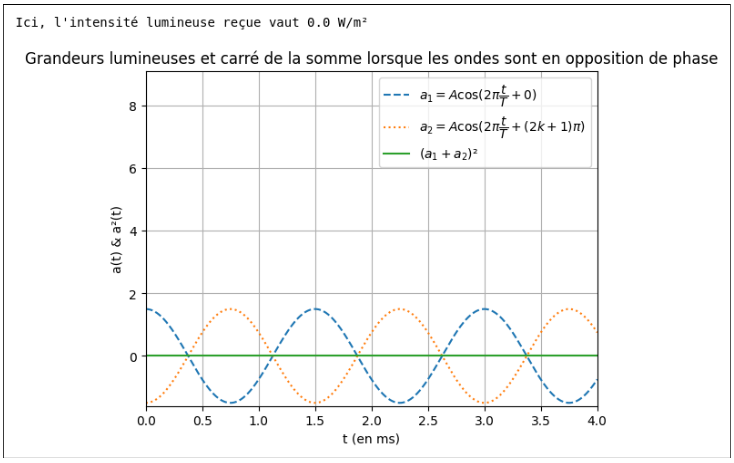
• Les élongations se renforcent lorsqu'elles sont en phase ; elles s'annulent lorsqu'elles sont en opposition de phase.

• Ce résultat s'étend à n'importe quel point où deux ondes sinusoïdales se superposent, et particulièrement dans le cas d'un champ d'interférence. Dans ce dernier cas, le déphasage n'est pas arbitrairement fixé, mais dû à la différence de marche.

3.2. Ondes lumineuses

• C'est l'extension de la situation précédente à des grandeurs lumineuses a(t) qui interfèrent. Toutefois, les récepteurs lumineux ne peuvent afficher que l'intensité lumineuse qui est la moyenne temporelle du carré de la grandeur lumineuse.
Les variations en vert ne sont jamais observables en raison du temps de réponse des capteurs.



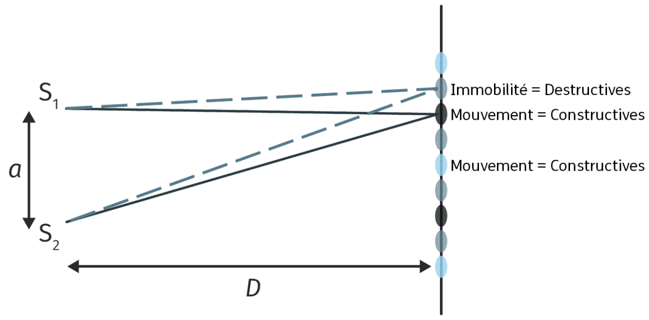


4. Champ d'interférences

• La superposition vue en un point au §3 est valable en chaque point P d'un champ d'interférence. En connaissant la différence de marche $\delta = S_2P - S_1P$ ou le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ entre les ondes issues de S_1 et S_2 qui arrivent en P, on connaît l'état de chaque point du plan.

Conditions d'interférences : les sources sont cohérentes
↳ synchrones
↳ leur déphasage est constant.

4.1. Ondes mécaniques : cuve à ondes



Expression de la somme des élongations en tous points de la cuve à ondes

• Les expressions des élongations aux points sources S_1 et S_2 sont : $y_{S_1}(t) = A\times\cos(2\pi\times\frac{t}{T})$ et $y_{S_2}(t) = A\times\cos(2\pi\times\frac{t}{T})$.

Ici, les sources sont même en phase $\Delta\Phi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$, et elles ont la même phase nulle à l'origine $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

• En un point P de l'écran, se superposent les élongations :
$y_1(t) = y_{S_1}(t-\tau_1) = A\times\cos(2\pi\times\frac{t-\tau_1}{T})$ issue de S_1, τ_1 secondes plus tôt et
$y_2(t) = y_{S_2}(t-\tau_2) = A\times\cos(2\pi\times\frac{t-\tau_2}{T})$ issue de S_2, τ_2 secondes plus tôt.

L'onde se propage dans le sens > 0, d'où le signe « − »

• Les décalages temporels τ_1 et τ_2 sont dus aux trajets parcourus S_1P et S_2P par les deux ondes pour atteindre M avec la célérité c.
↳ Avec $\tau_1 = \frac{S_1P}{c}$, le terme $\frac{\tau_1}{T}$ devient $\frac{\tau_1}{T} = \frac{S_1P}{cT} = \frac{S_1P}{\lambda}$; idem pour τ_2. On peut réécrire les élongations :
$y_1(t) = A\times\cos(2\pi\times(\frac{t}{T} - \frac{S_1P}{\lambda}))$
$y_2(t) = A\times\cos(2\pi\times(\frac{t}{T} - \frac{S_2P}{\lambda}))$.

$\varphi_1 = -2\pi\frac{S_1P}{\lambda}$; $\varphi_2 = -2\pi\frac{S_2P}{\lambda}$.
Les ondes arrivent en retard.

• On effectue la somme : $y(t) = A\times[\cos(2\pi\times(\frac{t}{T} - \frac{S_1M}{\lambda})) + \cos(2\pi\times(\frac{t}{T} - \frac{S_2M}{\lambda}))]$

En se souvenant que $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$, on identifie :
$a+b = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{S_1M}{\lambda} + \frac{t}{T} - \frac{S_2M}{\lambda}) = 2\pi(\frac{2t}{T} - \frac{S_1M + S_2M}{\lambda})$
$a-b = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{S_1M}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{S_2M}{\lambda}) = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$
↳ La somme devient :
$y(t) = 2A\cos(\frac{\pi\delta}{\lambda})\cos(2\pi\times(\frac{t}{T} - \frac{S_1M + S_2M}{2\lambda}))$ soit finalement :

$$\boxed{y(t) = 2A\cos(\frac{\pi\delta}{\lambda})\cos(2\pi\times\frac{t}{T} + \Phi)\ (1)}$$

C'est en quelque sorte la démo mathématique des observations du pointage sur la cuve à onde.

$\Phi < 0$, la superposition est aussi en retard.

• Le terme en bleu est un terme temporel. Chaque point P vibre à la même fréquence que les sources.

• Chaque point P vibre avec une « amplitude » donnée par le terme en vert : un cos qui dépend de la différence de marche. Étant un cos, il peut être négatif (d'où les guillemets à amplitude) auquel cas on a affaire à un creux ; positif, un sommet.

• Il y a immobilité, lorsque les interférences sont destructives, pour $2A\cos(\frac{\pi\delta}{\lambda})=0$, soit $\frac{\pi\delta}{\lambda}=\frac{\pi}{2}[\pi]$ soit $\frac{\delta}{\lambda}=\frac{1}{2}+k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

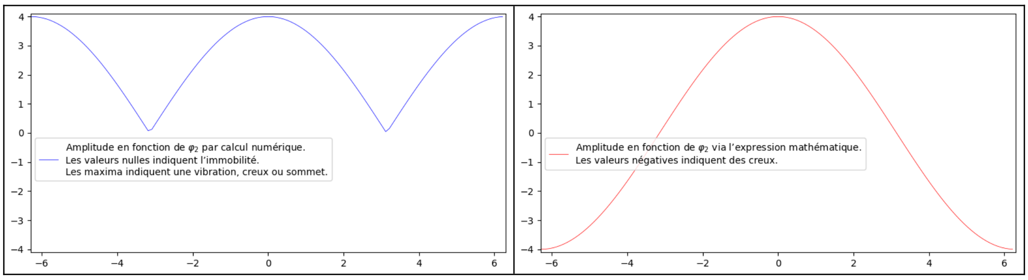
• Il y a mouvement, lorsque les interférences sont constructives pour :

↳ $2A\cos(\frac{\pi\delta}{\lambda})=1$, soit $\frac{\pi\delta}{\lambda}=0[2\pi]$ soit $\frac{\delta}{\lambda}=2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Sommets.

↳ $2A\cos(\frac{\pi\delta}{\lambda})=-1$, soit $\frac{\pi\delta}{\lambda}=\pi[2\pi]$ soit $\frac{\delta}{\lambda}=2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Creux.

k pair, amplitude = 1, le point correspondant est en phase avec les sources.

k impair, « amplitude » = – 1, le point correspondant est en opposition de phase avec les sources.



Est-ce cohérent avec la formule de Fresnel ? (cf. PCSI p.36)

Méthode 2.2 : Calcul de l'amplitude résultante

Lorsque deux signaux sinusoïdaux $s_1(t) = S_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2\cos(\omega t+\varphi_2)$ de même pulsation ω se superposent, le signal résultant est un signal sinusoïdal du type $S\cos(\omega t+\varphi)$ dont l'amplitude S se déduit de la **formule des interférences** :

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (2.1)$$

Avec $S_1 = S_2 = A$, $\varphi_1=-\frac{2\pi}{T}\tau_1$ et $\varphi_2=-\frac{2\pi}{T}\tau_2$, la formule de Fresnel s'écrit :

$S=\sqrt{A^2+A^2+2A^2\cos(\frac{2\pi}{T}(\tau_2-\tau_1))}$. Comme $\frac{\tau_2-\tau_1}{T}=\frac{\delta}{\lambda}$,

$S=\sqrt{2A^2(1+\cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda}))}$. En se souvenant de $1+\cos(2a)=2\cos^2(a)$,

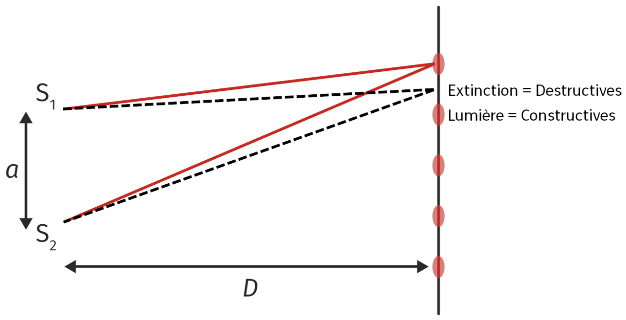
$S=\sqrt{4A^2\cos^2(\frac{\pi\delta}{\lambda})}$ et enfin : $S=\pm 2A\cos(\frac{\pi\delta}{\lambda})$.

La démo du cas particulier se fond bien dans le cas général.

Les solutions sont bien l'enveloppe d'une modulation.

4.2. Ondes lumineuses

• Il s'agit de faire le même calcul avec les grandeurs lumineuses, puis de passer à l'intensité, qui est la moyenne temporelle du carré de la grandeur lumineuse.



Expression de l'intensité lumineuse reçue

• D'une manière générale, la grandeur lumineuse s'écrit : $a(t)=A\times\cos(2\pi\times\frac{t}{T}+\varphi)$.

Son intensité lumineuse est : $I=K\langle(a(t))^2\rangle$ où K est un facteur de proportionnalité dû au capteur. Comme la moyenne temporelle du cos² vaut $\frac{1}{2}$, l'intensité lumineuse reçue est donc : $I=\frac{A^2}{2}$.

D'où viendrait la $\sqrt{2}$ qui traîne chez Éduscol qui définit $I=\frac{A}{\sqrt{2}}$? (pas homogène d'ailleurs)

• En repartant de (1) la somme des grandeurs lumineuses a la même expression :

$a_1(t)+a_2(t)=2A\cos(\frac{\pi\delta}{\lambda})\cos(2\pi\times\frac{t}{T}+\Phi)$

$(a_1(t)+a_2(t))^2=4A^2\cos^2(\frac{\pi\delta}{\lambda})\cos^2(2\pi\times\frac{t}{T}+\Phi)$.

L'intensité lumineuse vaut : $I=K\langle(a_1(t)+a_2(t))^2\rangle$

$I=2A^2\cos^2(\frac{\pi\delta}{\lambda})$ car $\langle\cos^2\rangle=\frac{1}{2}$, qui devient $I=A^2(1+\cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda}))$ grâce à la trigo.

Est-ce cohérent avec la formule de Fresnel ? (cf. PC p.534)

Phénomène d'interférences de deux ondes lumineuses cohérentes

Si deux ondes lumineuses sont cohérentes dans un domaine $(\mathscr{D})$, elles y interfèrent. L'intensité lumineuse résultante vaut alors en tout point de $(\mathscr{D})$:

(20.2) $$I(M)=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\varphi(M)) \quad \text{avec} \quad \varphi(M)=\frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)$$

Cette relation porte le nom de **relation de Fresnel**.

• Avec $I_1=I_2=\frac{A^2}{2}$, $I=A^2(1+\cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda}))$.

↳ L'intensité lumineuse est maximale pour $\cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda})=1$ soit $\frac{2\pi\delta}{\lambda}=0[2\pi]$ soit $\frac{\delta}{\lambda}=k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

↳ L'intensité lumineuse est nulle pour $\cos(\frac{2\pi\delta}{\lambda})=-1$ soit $\frac{2\pi\delta}{\lambda}=\pi[2\pi]$ soit $\frac{\delta}{\lambda}=\frac{1}{2}+k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.